является фокальной точкой произвольного порядка α ($\alpha \geqslant 4$);

4/если точка A, -фокальная точка второго (третьего порядка), то она является двукратной (трехкратной) фокальной точкой конгруэнции A;

5/для конгруэнции $B^3(A)$ справедливы следующие утверждения:

а/прямолинейные конгруэнции $\{A, \vec{e}_i\}, i=1,2$ -цилиндрические; б/ у прямолинейной конгруэнции $\{A, \vec{e}_3\}$ сдвоенный фокус совпадает с характеристической точкой плоскости $x^1 = 0$, а фокальная сеть линий - координатная; в/характеристическая точка плоскости параболы совпадает с точкой A, г/существует расслоение от конгруэнции парабол к конгруэнции $\{A, \vec{e}_2\}$.

Список литературы

1.Малаховский В.С. Конгруэнции парабол в эквиаффинной геометрии.-Тр.Томского ун-та,т.161,1962 ,с.76-86.

2.Вербицкая Л.А. Об одном классе конгруэнций парабол.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград,1980,вып.11,с.17-21.

3.Малаховская С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с невырождающимися фокальными многообразиями высших порядков.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.13.Калининград,1982,с.60-64.

4.Шмелева С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик в P_3 с двумя фокальными многообразиями второго порядка.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.15,Калининград,1984,с.115-120.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.16 1985

УДК 514.75

Е.Т.Ивлев

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ТЕНЗОРА РИЧЧИ РАССЛОЕНИЯ $P_{n,n}$

В статье дается геометрическая интерпретация одного тензора, аналогично тензору Риччи пространства аффинной связности [1](с.151).

1.Рассматривается пространство $P_{n,n}$ проективной связности C с точечным образующим элементом A_0 в смысле [2].Компоненты тензора кручения-кривизны R^K_{Jij} $(I, J, K, L = 0,1,\dots,n;\ i,j,k,\ell = 1,2,\dots,n)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям (см.(2) в [2]):

$$\nabla R^K_{Jij} + 2R^K_{Jij}\omega^0_0 = R^K_{Jij\ell}\,\omega^\ell_0, \quad R^K_{J(ij)} = 0, \quad R^K_{J(ij)\ell} = 0. \qquad (1)$$

2.Рассматриваются на секущей n-поверхности $\mathfrak{M}_n$ расслоения $P_{n,n}$ следующие величины, удовлетворяющие в силу (1) соответствующим дифференциальным уравнениям:

$$a_{i0} = a_{0i} = R^k_{0ik}, \quad a_{ij} = \frac{1}{2} R^k_{(ij)k}, \qquad (2)$$

$$\nabla a_{i0} + a_{i0}\omega^0_0 = a_{0ij}\,\omega^j_0, \quad \nabla a_{ij} + 2a_{ij}\omega^0_0 - a_{0(i}\omega^0_{j)} = a_{ijk}\,\omega^k_0, \qquad (3)$$

$$a_{0ij} = R^k_{0ikj} + R^k_{jki} - R^0_{0ij}, \quad a_{ijk} = \frac{1}{2} R^\ell_{(ij)\ell k} - \frac{1}{2} R^0_{(ij)k}.$$

Из (3) следует, что величины a_{0i} образуют один раз ковариантный тензор в смысле Г.Ф.Лаптева [3], а величины a_{ik} -дважды ковариантный симметрический тензор.

Рассмотрим в слое P_n точки A_0 расслоения $P_{n,n}$ некоторую точку $Y = y^J A_J$ и гиперплоскость Γ_{n-1}, определяемую в локальных слоевых координатах уравнением:

$$x_i x^i = 0. \qquad (4)$$

Из формул (8) статьи [2] и уравнения (4) следует, что каждой Y и гиперплоскости Γ_{n-1} в слое P_n точки A_0 отвечает линейный гиперкомплекс $K_{n-1}(\Gamma_{n-1}, Y)$, определяемый уравнением:

$$x_i y^k R^i_{kjk} u^j v^k = 0. \qquad (5)$$

Геометрически этот гиперкомплекс представляет собой совокупность всех таких пар линейно-независимых направлений $u=(A_0A_i)u^i$ и $v=(A_0A_j)v^j$, что $\overset{*}{R}(u,v)Y \in \Gamma_{n-1}$, где $\overset{*}{R}(u,v)$ -проективитеты слоя P_n в себя в смысле [2] (см.(8)). Из (5) следует, что направлению A_0Y в нуль-системе линейного гиперкомплекса $K_{n-1}(\Gamma_{n-1},Y)$ отвечает гиперплоскость:

$$H_{n-1}(\Gamma_{n-1},Y) \ni A_0 : \quad x_i y^k R^i_{kjq} y^j z^q = 0. \qquad (6)$$

Итак, каждой точке $Y=y^j A_j$ в слое P_n отвечает проективитет

$$\Pi(Y) = \{ y^k R^i_{kjq} y^j \} \qquad (7)$$

слоя P_n в себя, который гиперплоскость $\Gamma_{n-1} \ni A_0$ переводит в гиперплоскость $H_{n-1}(\Gamma_{n-1},Y)$. Множество всех точек Y в слое P_n точки $A_0 \in \mathfrak{M}_n$, которым отвечают проективитеты $\Pi(Y)$, являющиеся проективитетами W [4], в силу (7) и (2) образует гиперквадрику $Q^0_{n-1,2} \ni A_0$, определяемую уравнением

$$a_{ik} y^i y^k = 0. \qquad (8)$$

Отсюда заключаем, что гиперплоскость Γ^0_{n-1} в слое P_n точки A_0 расслоения $P_{n,n}$, определяемая в слоевых проективных координатах уравнением:

$$a_{0i} x^i = 0, \qquad (9)$$

является полярой точки A_0 относительно гиперквадрики $Q^0_{n-1,2}$. Такова геометрическая характеристика величин (2).

3. Расслоением $P^0_{n,n}$ называется расслоение $P_{n,n}$, у которого гиперплоскость Γ^0_{n-1} является неопределенной. Из (2) и (9) следует, что это расслоение характеризуется условиями:

$$a_{0i} = 0 \Leftrightarrow R^k_{0ik} = 0, \qquad (10)$$

которые с учетом (3) приводятся к соотношениям:

$$R^k_{0ikj} = R^k_{jik} + R^0_{0ij}. \qquad (11)$$

Из (3) в силу (10) следует, что величины a_{ij}, определенные по формулам (2), в случае расслоения $P^0_{n,n}$ образуют дважды ковариантный симметрический тензор в смысле Г.Ф. Лаптева [3]. Из (8) и (10) вытекает следующая

Т е о р е м а 1. Расслоение $P^0_{n,n}$ есть расслоение $P_{n,n}$, у которого гиперквадрика $Q^0_{n-1,2} \subset P_n$ является гиперконусом с вершиной A_0.

4. Рассмотрим в случае расслоения $P^0_{n,n}$ следующие величины, удовлетворяющие в силу (1) соответствующим дифференциальным уравнениям:

$$G_{ij} = R^k_{ijk}, \qquad (12)$$

$$\nabla G_{ij} + 2 G_{ij} \omega^0_0 = G_{ijk} \omega^k_0, \quad G_{ijk} = R^l_{ijlk} - R^0_{ijk}. \qquad (13)$$

Отсюда заключаем, что величины (12), не симметричные в общем случае по нижним индексам, образует дважды ковариантный тензор в смысле Г.Ф. Лаптева [3]. Этот тензор, следуя [1](стр.151), будем называть тензором Риччи расслоения $P^0_{n,n}$. Дадим геометрическую интерпретацию этому тензору.

Из (5) следует, что каждой точке Y и направлению $u=(A_0A_j)u^j$ отвечает проективитет слоя P_n точки A_0 в себя:

$$\overset{*}{\Pi}(y,u) = \{ y^j u^k R^i_{jkl} \}, \qquad (14)$$

который гиперплоскость Γ_{n-1} переводит в гиперплоскость в слое P_n точки A_0 расслоения $P^0_{n,n}$, отвечающую направлению u в нуль-системе линейного гиперкомплекса $K_{n-1}(\Gamma_{n-1}, Y)$. Поэтому в силу (11) и (12) каждому направлению $u=(A_0A_i)u^i$ в слое точки A_0 расслоения $P^0_{n,n}$ отвечают две гиперплоскости

$$G^1_{n-1}(u):\ G_{ij} u^i v^j = 0, \quad G^2_{n-1}(u):\ G_{ij} u^j v^i = 0. \qquad (15)$$

Здесь гиперплоскость $G^1_{n-1}(u)\{G^2_{n-1}(u)\}$, отвечающая направлению u, представляет собой совокупность всех таких направлений $v=(A_0A_i)v^i$, в слое P_n точки A_0, которым отвечают проективитеты $\overset{*}{\Pi}(v,u)\{\overset{*}{\Pi}(u,v)\}$, являющиеся проективитетами W в смысле [4]. В общем случае, гиперплоскости $G^1_{n-1}(u)$ и $G^2_{n-1}(u)$, отвечающие любому направлению u, не совпадают друг с другом. Совокупность всех направлений x в слое P_n точки A_o расслоения $P^o_{n,n}$, которым отвечают гиперплоскости $G^1_{n-1}(x)$ или $G^2_{n-1}(x)$, проходящие через x, в силу (15),(12),(10) и (2) определяется уравнением

$$Q^o_{n-1,2}: \quad a_{ij}x^i x^j = 0, \qquad (16)$$

и образует гиперконус $Q^o_{n-1,2}$. С другой стороны, линейный гиперкомплекс C^o_{n-1} в слое P_n точки A_o расслоения $P^o_{n,n}$, определяемый уравнением

$$c_{ij}x^i y^j = 0, \qquad (17)$$

где

$$c_{ij} = \frac{1}{2} G_{[ij]}, \qquad (18)$$

геометрически характеризуется тем, что каждому направлению $x=(A_oA_i)x^i$ в нуль-системе этого линейного гиперкомплекса отвечает гиперплоскость, проходящая через x и $G^1_{n-1}(x) \cap G^2_{n-1}(x)$. Таким образом, симметрическая и кососимметрическая части тензора Риччи G_{ij} расслоения $P^o_{n,n}$ определяют в слое P_n точки A_o гиперконус $Q^o_{n-1,2}$, определяемый уравнением (16), и линейный гиперкомплекс, определяемый уравнением (17) с учетом (18).

Заметим, что пространство аффинной связности является частным случаем расслоения $P^o_{m,n}$.

Список литературы

1. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М., 1976.

2. Ивлев Е.Т. О тангенциально-вырожденных расслоениях. В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 15. Калининград, 1984, с. 32-38.

3. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. - Тр. Моск. матем. об-ва, I, 1953, с. 275-382.

4. Ивлев Е.Т., Исабеков М.Б. К проективной геометрической интерпретации некоторых образов, определяемых двухвалентными тензорами. - 3-я научная конф. по матем. и мех. Вып. 1. Томск, 1973, с. 50-52.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 16 1985

УДК 514.75

О.В. Казнина

ОБ ОТОБРАЖЕНИИ СЕТЕЙ В ЗАДАЧЕ ФУБИНИ-ЧЕХА

В работе рассмотрено одно из свойств сетей Σ_p и $\overline{\Sigma}_p$, сохраняющееся в отображении $f: (V_p \subset E_n) \to (\overline{V}_p \subset E_{p+\tau})$. Найдены признаки некоторых свойств сетей $\Sigma_p \subset V_p$ и $\overline{\overline{\Sigma}}_p \subset \overline{V}_p$.

1. В евклидовом пространстве E_n к гладкой поверхности V_p присоединим в каждой точке $x \in V_p$ репер $R^x = \{x, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha\}$, $(i,j=1,\dots,p;\ \alpha,\beta=p+1,\dots,n)$ так, что векторы $\vec{e}_i$ образуют базис касательной плоскости $T_p(x)$ к поверхности V_p, $|\vec{e}_i|=1$, а $\vec{e}_\alpha$ — базис нормальной плоскости $N_{n-p}(x)$ к V_p, причем $\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$. Деривационные формулы репера R^x имеют вид

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^\alpha \vec{e}_\alpha, \quad d\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha^i \vec{e}_i + \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta. \qquad (1)$$

Рассмотрим отображение $f: (V_p \subset E_p) \to (\overline{V}_p \subset E_{p+\tau})$, где поверхность $\overline{V}_p$ получена проектированием поверхности V_p в фиксированную плоскость $E_{p+\tau}$ вдоль ортогонально дополнительной к ней плоскости $E_{n-(p+\tau)}$. Плоскость $E_{p+\tau}$ задана точкой σ и векторами $\vec{e}_{\hat\alpha}$ $(\hat\alpha,\hat\beta=p+\tau+1,\dots,n)$ такими, что $\vec{e}_{\hat\alpha} \cdot \vec{e}_{\hat\beta} = \delta_{\hat\alpha\hat\beta}$. Присоединим к поверхности $\overline{V}_p$ в каждой точке $x_1=f(x)$ репер $R^{x_1}=\{x_1, \vec{a}_i, \vec{a}_\tau\}$, $(\tau,\sigma=p+1,\dots,p+\tau)$, где

$$\vec{a}_i = \vec{e}_i - h_i^{\hat\alpha}\vec{e}_{\hat\alpha}, \quad \vec{a}_\tau = \vec{e}_\tau. \qquad (*)$$

Деривационные формулы репера R^{x_1} запишутся в виде

$$d\vec{x}_1 = \overline{\omega}^i \vec{a}_i, \quad d\vec{a}_i = \overline{\omega}_i^j \vec{a}_j + \overline{\omega}_i^\tau \vec{e}_\tau,$$
$$d\vec{e}_\tau = \overline{\omega}_\tau^i \vec{a}_i + \overline{\omega}_\tau^\sigma \vec{e}_\sigma. \qquad (2)$$

Дифференциальные уравнения отображения f имеют вид:

$$\overline{\omega}^i = \omega^i. \qquad (3)$$

Пользуясь соотношениями (*), находим: